

ИЗСЛЕДВАНЕ НА НАПРЕГНАТО СЪСТОЯНИЕ С ИЗВЕСТНО ГЛАВНО НАПРАВЛЕНИЕ

НАПРЕГНАТО СЪСТОЯНИЕ, ЗАДАДЕНО С ТЕНЗОР

ЗАДАЧА №1:

Напрегнатото състояние в околност на точка е зададено с тензора T .

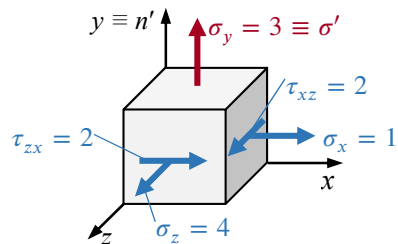
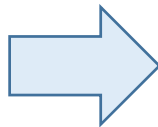
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ МПа}$$

1. Да се начертае съответстващ на T елементарен паралелепипед;
2. Да се пресметнат главните напрежения;
3. Да се определи видът на напрегнатото състояние;
4. Да се определят главните направления;
5. Да се определи най-голямото тангенциално напрежение.

РЕШЕНИЕ:

I. Елементарен паралелепипед

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x = 1 & \tau_{yx} = 0 & \tau_{zx} = 2 \\ \tau_{xy} = 0 & \sigma_y = 3 & \tau_{zy} = 0 \\ \tau_{xz} = 2 & \tau_{yz} = 0 & \sigma_z = 4 \end{pmatrix}, \text{ МПа}$$



II. Главни напрежения

В площадката с нормала ос y няма тангенциални напрежения, следователно тя е главна площадка; $y \equiv n'$ е първото известно главно направление, $\sigma_y = \sigma'$ е първото известно главно напрежение. Главните напрежения са:

$$\sigma' \equiv \sigma_y = 3 \text{ МПа};$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma'' \\ \sigma''' \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{4 + 1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4 - 1}{2}\right)^2 + 2^2} = \begin{cases} 5 \text{ МПа}; \\ 0 \text{ МПа}. \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \sigma'' = 5 \text{ МПа}; \sigma_2 = \sigma' = \sigma_y = 3 \text{ МПа}; \sigma_3 = \sigma''' = 0 \text{ МПа}.$$

III. Вид на напрегнатото състояние

Две от главните напрежения са различни от нула, следователно напрегнатото състояние е *двумерно*.

IV. Положение на главните направления

Първото известно главно направление ($n' \equiv n_2$) съвпада с ос y . Останалите две са в равнината xz .

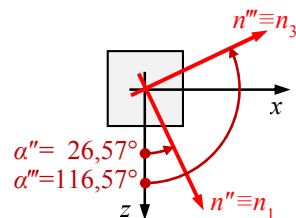
$$\alpha'' = \arctg \frac{\sigma'' - \sigma_z}{\tau_{zx}} = \arctg \frac{5 - 4}{2} = 26,57^\circ.$$

$$\alpha''' = \alpha'' + 90^\circ = 26,57^\circ + 90^\circ = 116,57^\circ.$$

α'' е ъгълът между главно направление n'' и ос z .

$$n' \equiv n_2 \equiv y; n'' \equiv n_1; n''' \equiv n_3.$$

Поглежда се елементарният паралелепипед откъм ос y за да се види равнината xz .



V. Максимално тангенциално напрежение

$$\left. \begin{matrix} \tau_{13} \\ \tau_{31} \end{matrix} \right\} = \mp \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \mp \frac{5 - 0}{2} = \mp 2,5 \text{ МПа} = \max \tau.$$

Максималните тангенциални напрежения сключват ъгли от $\pm 45^\circ$ с направления n_1 и n_3 .

ЗАДАЧА №2:

Напрегнатото състояние в околност на точка е зададено с тензора T .

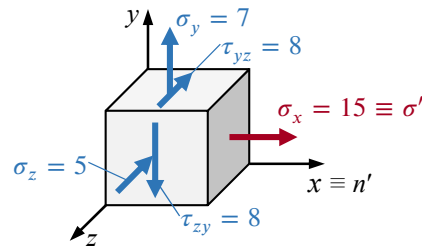
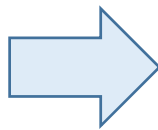
$$T = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & -8 & -5 \end{pmatrix}, \text{ MPa}$$

1. Да се начертае съответстващ на T елементарен паралелепипед;
2. Да се пресметнат главните напрежения;
3. Да се определи видът на напрегнатото състояние;
4. Да се определят главните направления;
5. Да се определи най-голямото тангенциално напрежение.

РЕШЕНИЕ:

I. Елементарен паралелепипед

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x = 15 & \tau_{yx} = 0 & \tau_{zx} = 0 \\ \tau_{xy} = 0 & \sigma_y = 7 & \tau_{zy} = -8 \\ \tau_{xz} = 0 & \tau_{yz} = -8 & \sigma_z = -5 \end{pmatrix}, \text{ MPa}$$



II. Главни напрежения

В площадката с нормала ос x няма тангенциални напрежения, следователно тя е главна площадка; $x \equiv n'$ е първото известно главно направление, $\sigma_x = \sigma'$ е първото известно главно напрежение. Главните напрежения са:

$$\sigma' \equiv \sigma_x = 15 \text{ MPa};$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma'' \\ \sigma''' \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{7 - 5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7 + 5}{2}\right)^2 + (-8)^2} = \begin{cases} 11 \text{ MPa}; \\ -9 \text{ MPa}. \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \sigma' = \sigma_x = 15 \text{ MPa}; \sigma_2 = \sigma'' = 11 \text{ MPa}; \sigma_3 = \sigma''' = -9 \text{ MPa}.$$

III. Вид на напрегнатото състояние

Трите главни напрежения са различни от нула, следователно напрегнатото състояние е *тримерно*.

IV. Положение на главните направления

Първото известно главно направление ($n' \equiv n_1$) съвпада с ос x . Останалите две са в равнината yz .

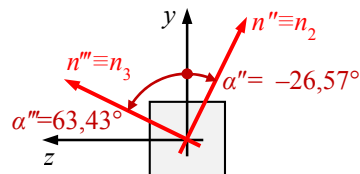
$$\alpha'' = \arctg \frac{\sigma'' - \sigma_y}{\tau_{yz}} = \arctg \frac{11 - 7}{-8} = -26,57^\circ.$$

$$\alpha''' = \alpha'' + 90^\circ = -26,57^\circ + 90^\circ = 63,43^\circ.$$

α'' е ъгълът между главно направление n'' и ос y .

$$n' \equiv n_1 \equiv x; n'' \equiv n_2; n''' \equiv n_3.$$

Поглежда се елементарният паралелепипед откъм ос x за да се види равнината yz .



V. Максимално тангенциално напрежение

$$\left. \begin{matrix} \tau_{13} \\ \tau_{31} \end{matrix} \right\} = \mp \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \mp \frac{15 + 9}{2} = \mp 12 \text{ MPa} = \max \tau.$$

Максималните тангенциални напрежения сключват ъгли от $\pm 45^\circ$ с направления n_1 и n_3 .

ЗАДАЧА №3:

Напрегнатото състояние в околност на точка е зададено с тензора T .

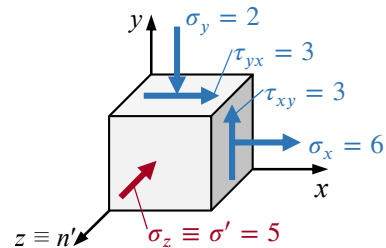
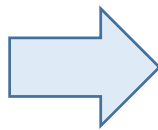
$$T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \text{ MPa}$$

1. Да се начертае съответстващ на T елементарен паралелепипед;
2. Да се пресметнат главните напрежения;
3. Да се определи видът на напрегнатото състояние;
4. Да се определят главните направления;
5. Да се определи най-голямото тангенциално напрежение.

РЕШЕНИЕ:

I. Елементарен паралелепипед

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x = 6 & \tau_{yx} = 3 & \tau_{zx} = 0 \\ \tau_{xy} = 3 & \sigma_y = -2 & \tau_{zy} = 0 \\ \tau_{xz} = 0 & \tau_{yz} = 0 & \sigma_z = -5 \end{pmatrix}, \text{ MPa}$$



II. Главни напрежения

В площадката с нормала ос z няма тангенциални напрежения, следователно тя е главна площадка; $z \equiv n'$ е първото известно главно направление, $\sigma_z = \sigma'$ е първото известно главно напрежение. Главните напрежения са:

$$\sigma' \equiv \sigma_z = -5 \text{ MPa};$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma'' \\ \sigma''' \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{6 - 2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6 + 2}{2}\right)^2 + 3^2} = \begin{cases} 7 \text{ MPa}; \\ -3 \text{ MPa}. \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \sigma'' = 7 \text{ MPa}; \sigma_2 = \sigma''' = -3 \text{ MPa}; \sigma_3 = \sigma' = \sigma_z = -5 \text{ MPa}.$$

III. Вид на напрегнатото състояние

Трите главни напрежения са различни от нула, следователно напрегнатото състояние е *тримерно*.

IV. Положение на главните направления

Първото известно главно направление ($n' \equiv n_3$) съвпада с ос z . Останалите две са в равнината xy .

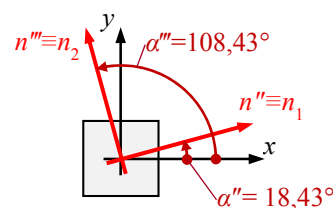
$$\alpha'' = \arctg \frac{\sigma'' - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \arctg \frac{7 - 6}{3} = 18,43^\circ.$$

$$\alpha''' = \alpha'' + 90^\circ = 18,43^\circ + 90^\circ = 108,43^\circ.$$

$$n' \equiv n_3 \equiv z; n'' \equiv n_1; n''' \equiv n_2.$$

α'' е ъгълът между главно направление n_1 и ос x .

Поглежда се елементарният паралелепипед откъм ос z за да се види равнината xy .



V. Максимално тангенциално напрежение

$$\left. \begin{matrix} \tau_{13} \\ \tau_{31} \end{matrix} \right\} = \mp \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \mp \frac{7 + 5}{2} = \mp 6 \text{ MPa} = \max \tau.$$

Максималните тангенциални напрежения сключват ъгли от $\pm 45^\circ$ с направления n_1 и n_3 .