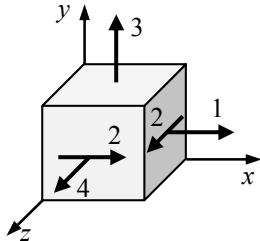


# ИЗСЛЕДВАНЕ НА НАПРЕГНАТО СЪСТОЯНИЕ С ИЗВЕСТНО ГЛАВНО НАПРАВЛЕНИЕ

## НАПРЕГНАТО СЪСТОЯНИЕ, ЗАДАДENO С ЕЛЕМЕНТАРЕН ПАРАЛЕЛЕПИПЕД

### ЗАДАЧА №1:

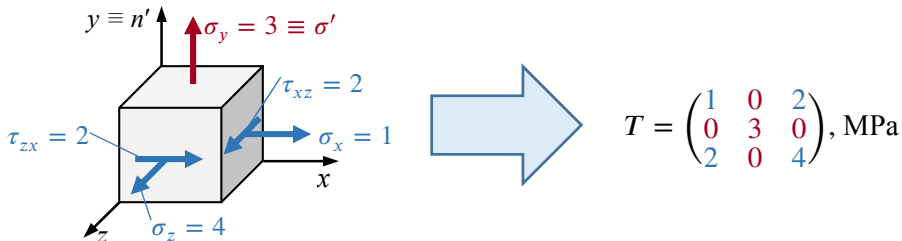


Напрегнатото състояние в околност на точка е зададено с показания елементарен паралелепипед. Дадените напрежения са в МПа.

1. Да се състави съответният тензор на напреженията;
2. Да се пресметнат главните напрежения;
3. Да се определи видът на напрегнатото състояние;
4. Да се определят главните направления;
5. Да се определи най-голямото тангенциално напрежение.

### РЕШЕНИЕ:

#### I. Тензор на напреженията



#### II. Главни напрежения

В площадката с нормала ос  $y$  няма тангенциални напрежения, следователно тя е главна площадка;  $y \equiv n'$  е първото известно главно направление,  $\sigma_y = \sigma'$  е първото известно главно напрежение. Главните напрежения са:

$$\sigma' \equiv \sigma_y = 3 \text{ МПа};$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma'' \\ \sigma''' \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} = \frac{4+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4-1}{2}\right)^2 + 2^2} = \begin{cases} 5 \text{ МПа}; \\ 0 \text{ МПа}. \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \sigma'' = 5 \text{ МПа}; \sigma_2 = \sigma' = \sigma_y = 3 \text{ МПа}; \sigma_3 = \sigma''' = 0 \text{ МПа}.$$

#### III. Вид на напрегнатото състояние

Две от главните напрежения са различни от нула, следователно напрегнатото състояние е *двумерно*.

#### IV. Положение на главните направления

Първото известно главно направление ( $n' \equiv n_2$ ) съвпада с ос  $y$ . Останалите две са в равнината  $zx$ .

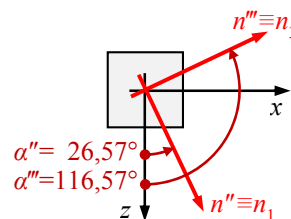
$$\alpha'' = \arctg \frac{\sigma'' - \sigma_z}{\tau_{zx}} = \arctg \frac{5-4}{2} = 26,57^\circ.$$

$$\alpha''' = \alpha'' + 90^\circ = 26,57^\circ + 90^\circ = 116,57^\circ.$$

$\alpha''$  е ъгълът между главно направление  $n''$  и ос  $z$ .

$$n' \equiv n_2 \equiv y; n'' \equiv n_1; n''' \equiv n_3.$$

Поглежда се елементарният паралелепипед откъм ос  $y$  за да се види равнината  $zx$ .

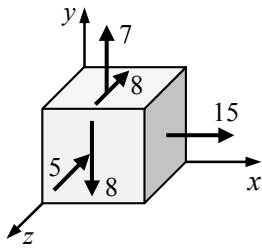


#### V. Максимално тангенциално напрежение

$$\left. \begin{matrix} \tau_{13} \\ \tau_{31} \end{matrix} \right\} = \mp \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \mp \frac{5-0}{2} = \mp 2,5 \text{ МПа} = \max \tau.$$

Максималните тангенциални напрежения сключват ъгли от  $\pm 45^\circ$  с направления  $n_1$  и  $n_3$ .

## ЗАДАЧА №2:

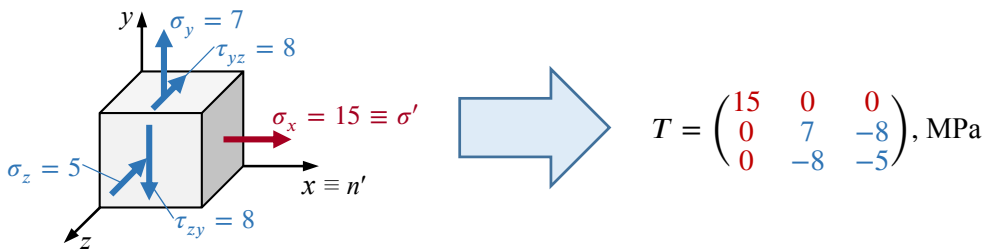


Напрегнатото състояние в околност на точка е зададено с показания елементарен паралелепипед. Дадените напрежения са в МПа.

1. Да се състави съответният тензор на напреженията;
2. Да се пресметнат главните напрежения;
3. Да се определи видът на напрегнатото състояние;
4. Да се определят главните направления;
5. Да се определи най-голямото тангенциално напрежение.

## РЕШЕНИЕ:

### I. Тензор на напреженията



### II. Главни напрежения

В площадката с нормала ос  $x$  няма тангенциални напрежения, следователно тя е главна площадка;  $x \equiv n'$  е първото известно главно направление,  $\sigma_x = \sigma'$  е първото известно главно напрежение. Главните напрежения са:

$$\sigma' \equiv \sigma_x = 15 \text{ МПа};$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma'' \\ \sigma''' \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{7 - 5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7 + 5}{2}\right)^2 + (-8)^2} = \begin{cases} 11 \text{ МПа}; \\ -9 \text{ МПа}. \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \sigma' = \sigma_x = 15 \text{ МПа}; \sigma_2 = \sigma'' = 11 \text{ МПа}; \sigma_3 = \sigma''' = -9 \text{ МПа}.$$

### III. Вид на напрегнатото състояние

Трите главни напрежения са различни от нула, следователно напрегнатото състояние е *тримерно*.

### IV. Положение на главните направления

Първото известно главно направление ( $n' \equiv n_1$ ) съвпада с ос  $x$ . Останалите две са в равнината  $yz$ .

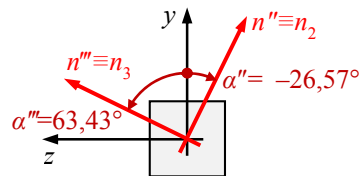
$$\alpha'' = \arctg \frac{\sigma'' - \sigma_y}{\tau_{yz}} = \arctg \frac{11 - 7}{-8} = -26,57^\circ.$$

$$\alpha''' = \alpha'' + 90^\circ = -26,57^\circ + 90^\circ = 63,43^\circ.$$

$\alpha''$  е ъгълът между главно направление  $n''$  и ос  $y$ .

$$n' \equiv n_1 \equiv x; n'' \equiv n_2; n''' \equiv n_3.$$

Поглежда се елементарният паралелепипед откъм ос  $x$  за да се види равнината  $yz$ .

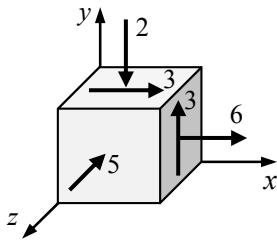


### V. Максимално тангенциално напрежение

$$\left. \begin{matrix} \tau_{13} \\ \tau_{31} \end{matrix} \right\} = \mp \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \mp \frac{15 + 9}{2} = \mp 12 \text{ МПа} = \max \tau.$$

Максималните тангенциални напрежения сключват ъгли от  $\pm 45^\circ$  с направления  $n_1$  и  $n_3$ .

### ЗАДАЧА №3:

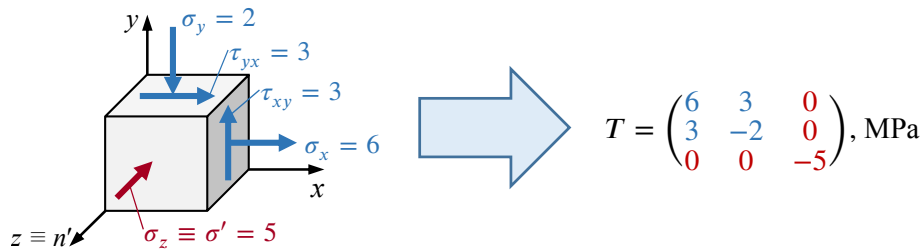


Напрегнатото състояние в околност на точка е зададено с показания елементарен паралелепипед. Дадените напрежения са в МПа.

1. Да се състави съответният тензор на напреженията;
2. Да се пресметнат главните напрежения;
3. Да се определи видът на напрегнатото състояние;
4. Да се определят главните направления;
5. Да се определи най-голямото тангенциално напрежение.

### РЕШЕНИЕ:

#### I. Тензор на напреженията



#### II. Главни напрежения

В площадката с нормала ос  $z$  няма тангенциални напрежения, следователно тя е главна площадка;  $z \equiv n'$  е първото известно главно направление,  $\sigma_z = \sigma'$  е първото известно главно напрежение. Главните напрежения са:

$$\sigma' \equiv \sigma_z = -5 \text{ МПа};$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma'' \\ \sigma''' \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{6 - 2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6 + 2}{2}\right)^2 + 3^2} = \begin{cases} 7 \text{ МПа}; \\ -3 \text{ МПа}. \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \sigma'' = 7 \text{ МПа}; \sigma_2 = \sigma''' = -3 \text{ МПа}; \sigma_3 = \sigma' = \sigma_z = -5 \text{ МПа}.$$

#### III. Вид на напрегнатото състояние

Трите главни напрежения са различни от нула, следователно напрегнатото състояние е *тримерно*.

#### IV. Положение на главните направления

Първото известно главно направление ( $n' \equiv n_3$ ) съвпада с ос  $z$ . Останалите две са в равнината  $xy$ .

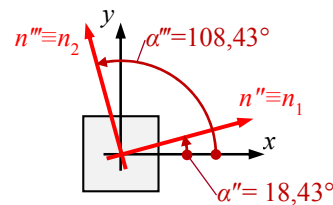
$$\alpha'' = \arctg \frac{\sigma'' - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \arctg \frac{7 - 6}{3} = 18,43^\circ.$$

$$\alpha''' = \alpha'' + 90^\circ = 18,43^\circ + 90^\circ = 108,43^\circ.$$

$$n' \equiv n_3 \equiv z; n'' \equiv n_1; n''' \equiv n_2.$$

$\alpha''$  е ъгълът между главно направление  $n_1$  и ос  $x$ .

Поглежда се елементарният паралелепипед откъм ос  $z$  за да се види равнината  $xy$ .



#### V. Максимално тангенциално напрежение

$$\left. \begin{matrix} \tau_{13} \\ \tau_{31} \end{matrix} \right\} = \mp \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \mp \frac{7 + 5}{2} = \mp 6 \text{ МПа} = \max \tau.$$

Максималните тангенциални напрежения сключват ъгли от  $\pm 45^\circ$  с направления  $n_1$  и  $n_3$ .