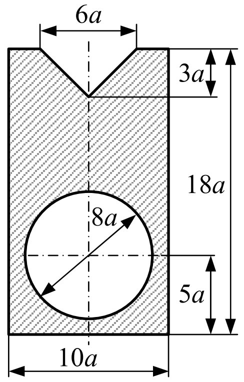
ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ГЛАВНИ ИНЕРЦИОННИ ОСИ И МОМЕНТИ НА СЛОЖНИ ФИГУРИ:

ФИГУРА С ЕДНА ОС НА СИМЕТРИЯ, СЪСТАВЕНА ОТ ПРАВОЪГЪЛНИК, ТРИЪГЪЛНИК И КРЪГ



УСЛОВИЕ:

Да се определи положението на главните инерционни оси и да се пресметнат стойностите на главните инерционни моменти.

РЕШЕНИЕ:

1. Сложната фигура се разделя на прости фигури

Проста фигура 1: правоъгълник $10a\times18a$;
Проста фигура 2: кръг (празнина);
Проста фигура 3: триъгълник (празнина).

2. Поставят се центровете на тежест на простите фигури и се означават като C_1, C_2 , C_3 (виж чертежа долу на следващата страница).

3. Спомагателна координатна система – $\bar{y}\,\bar{z}$

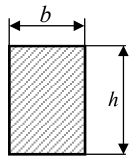
- Сложната фигура има една (вертикална) ос на симетрия. Тя се избира за ос $\bar{z}$ на спомагателната координатна система и е първата определена главна инерционна ос.
- Избирам началото на спомагателната координатна система да съвпада с център C_1.

4. Положение на центъра на тежест на сложната фигура спрямо спомагателната координатна система – точка C, с координати $\bar{y}_C$ и $\bar{z}_C$:

$$\bar{y}_C=\frac{\bar{y}_{C1}A_1-\bar{y}_{C2}A_2-\bar{y}_{C3}A_3}{A_1-A_2-A_3}=0,\ \text{защото}\ \bar{y}_{C1}=\bar{y}_{C2}=\bar{y}_{C3}=0;$$

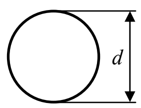
$$\bar{z}_C=\frac{\bar{z}_{C1}A_1-\bar{z}_{C2}A_2-\bar{z}_{C3}A_3}{A_1-A_2-A_3}=\frac{0.180a^2-4a.50{,}24a^2-(-8a)9a^2}{180a^2-50{,}24a^2-9a^2}=-1{,}07a,\ \text{където:}$$

Проста фигура 1:



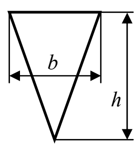
$$A_1=bh=10a.18a=180a^2;\qquad \bar{z}_{C1}=0.$$

Проста фигура 2:



$$A_2=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi(8a)^2}{4}=50{,}24a^2;\quad \bar{z}_{C2}=\frac{8a}{2}=4a.$$

Проста фигура 3:



$$A_3=\frac{bh}{2}=\frac{6a.3a}{2}=9a^2.\qquad \bar{z}_{C3}=-\left(\frac{18a}{2}-\frac{3a}{3}\right)=-8a.$$

Координатите на точки са означени в зелено на чертежа на следващата страница.

5. Построява се координатна система *Cyz*, успоредна на $C\bar{y}\bar{z}$

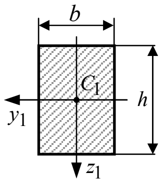
- Координати на центровете на тежест на простите фигури спрямо Cyz (означени в червено):

Проста фигура 1: $y_{C1}=0$; $z_{C1}=-\bar{z}_C=1{,}07a$.
Проста фигура 2: $y_{C2}=0$; $z_{C2}=\bar{z}_{C2}+z_{C1}=4a+1{,}07a=5{,}07a$.
Проста фигура 3: $y_{C3}=0$; $z_{C3}=-\left(\left|\bar{z}_{C3}\right|-\left|\bar{z}_C\right|\right)=-(8a-1{,}07a)=-6{,}93a$.

6. Инерционни моменти на простите фигури спрямо *Cyz*

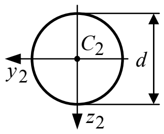
$$I_y^{(1)} = I_{y1} + z_{C1}^2 A_1 = 4860a^4 + (1{,}07a)^2 180a^2 = 5066{,}08a^4;$$
$$I_y^{(2)} = I_{y2} + z_{C2}^2 A_2 = 200{,}96a^4 + (5{,}07a)^2 50{,}24a^2 = 1492{,}37a^4;$$
$$I_y^{(3)} = I_{y3} + z_{C3}^2 A_3 = 4{,}5a^4 + (-6{,}93a)^2 9a^2 = 436{,}72a^4;$$
$$I_z^{(1)} = I_{z1} + y_{C1}^2 A_1 = I_{z1} = 1500a^4;$$
$$I_z^{(2)} = I_{z2} + y_{C2}^2 A_2 = I_{z2} = 200{,}96a^4;$$
$$I_z^{(3)} = I_{z3} + y_{C3}^2 A_3 = I_{z3} = 13{,}5a^4, \text{където}:$$

Проста фигура 1:



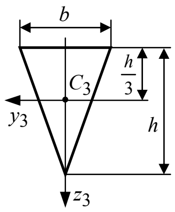
$$I_{y1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{10a(18a)^3}{12} = 4860a^4;$$
$$I_{z1} = \frac{b^3h}{12} = \frac{(10a)^3 18a}{12} = 1500a^4.$$

Проста фигура 2:



$$I_{y2} = I_{z2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3{,}14(8a)^4}{64} = 200{,}96a^4.$$

Проста фигура 3:



$$I_y = \frac{bh^3}{36} = \frac{6a(3a)^3}{36} = 4{,}5a^4;$$
$$I_z = \frac{b^3h}{48} = \frac{(6a)^3 3a}{48} = 13{,}5a^4.$$

7. Инерционни моменти I_y и I_z на сложната фигура

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} - I_y^{(3)} = 5066{,}08a^4 - 1492{,}37a^4 - 436{,}72a^4 = 3136{,}99a^4;$$
$$I_z = I_z^{(1)} - I_z^{(2)} - I_z^{(3)} = 1500a^4 - 200{,}96a^4 - 13{,}5a^4 = 1285{,}54a^4.$$

Тъй като сложната фигура има ос на симетрия, y и z са главни инерционни оси, I_y и I_z са главни инерционни моменти, $I_{yz} = 0$, задачата е решена.